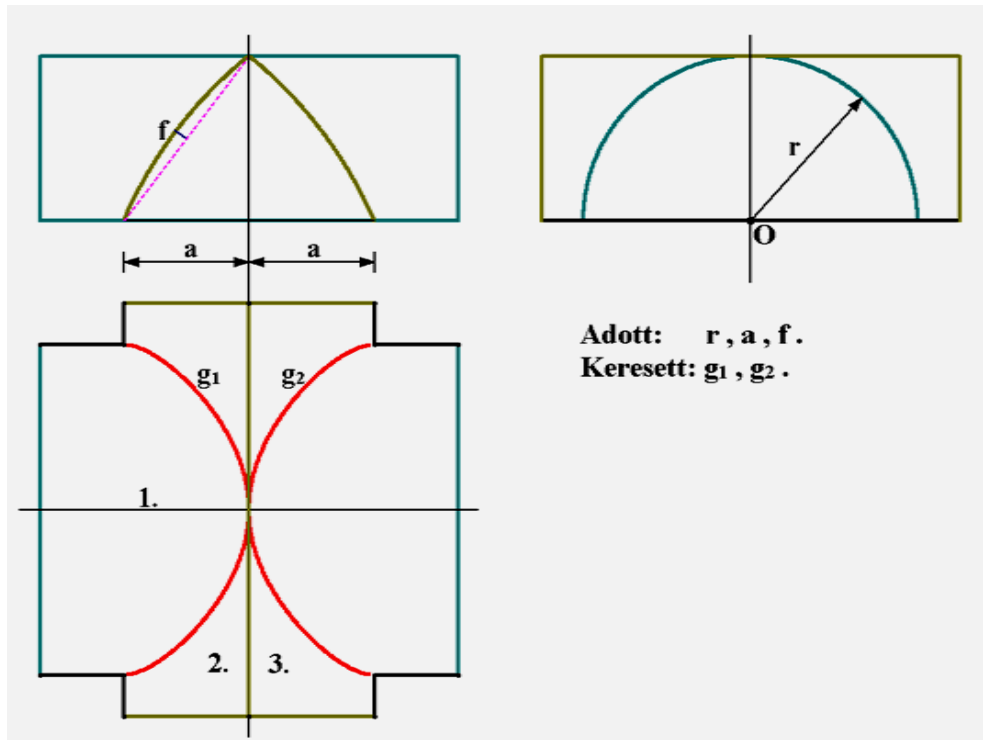


Félkörhenger tető csúcsíves kutyaóllal

A már többször említett [1] munkában találtunk egy feladatot, melynek részleges feldolgozását végezzük el itt – 1. ábra.



1. ábra

Itt azt láthatjuk, hogy három hengeres felület összemetsződését rajzoltuk meg vetületeikkel, úgy, hogy:

~ az első (1. jelű) felület egy r sugarú félhenger,

~ a másik két (2. és 3. jelű) felület egy - egy olyan henger - darab, melyek körívének víz - szintes vetülete a , magassága r , nyílmagassága f , tengelyeik egymással párhuzamosak és merőlegesek az 1. henger függőleges szimmetriasíkjára.

Az első teendő a 2. és 3. henger körei sugarának és középpontjának meghatározása.

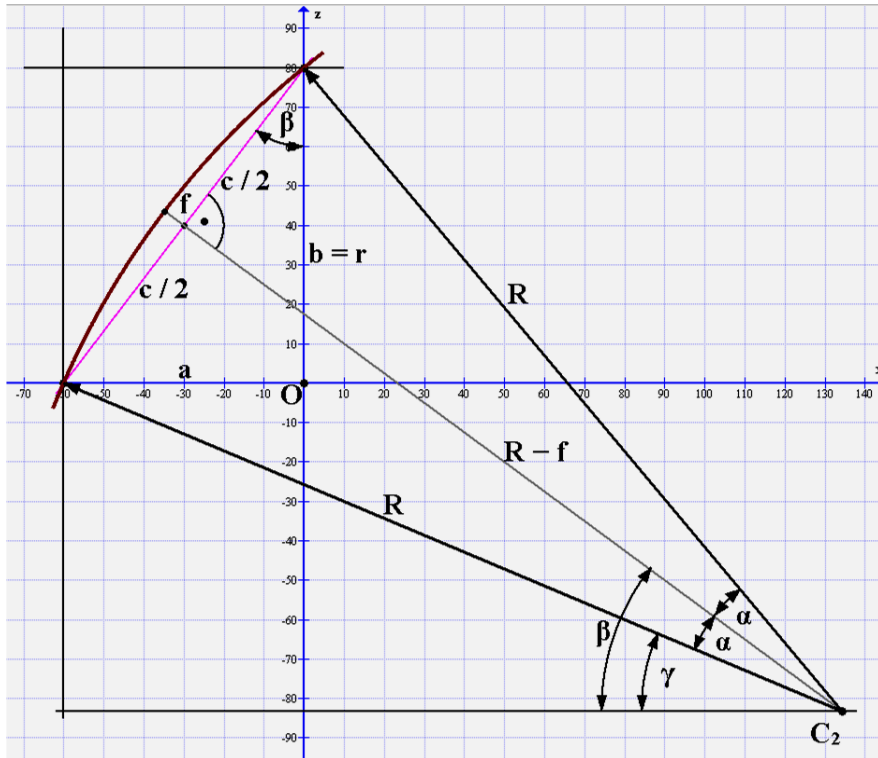
Ehhez tekintsük a 2. ábrát!

Innen a körív húrhossza *Pitagorász* tételével:

$$c^2 = a^2 + r^2 \rightarrow \underline{c = \sqrt{a^2 + r^2}} ; \quad (1)$$

az R sugarat is *Pitagorász* tételével határozzuk meg:

$$R^2 = (R - f)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 ; \quad (2)$$



2. ábra

most (2) - t kifejtve:

$$R^2 = R^2 - 2 \cdot R \cdot f + f^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \rightarrow 2 \cdot R \cdot f = f^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \rightarrow R = \frac{f^2 + \frac{c^2}{4}}{2 \cdot f} = \frac{f}{2} + \frac{c^2}{8 \cdot f}, \text{ innen:}$$

$$\underline{R = \frac{c^2}{8 \cdot f} + \frac{f}{2}} . \quad (3)$$

A 2. henger köríve C_2 középpontjának koordinátáihoz előbb meghatározzuk a 2. ábrán jelölt szögeket:

$$\sin \alpha = \frac{c}{2 \cdot R} \rightarrow \underline{\alpha = \arcsin\left(\frac{c}{2 \cdot R}\right)}; \quad (4)$$

$$\sin \beta = \frac{a}{c} \rightarrow \underline{\beta = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)}; \quad (5)$$

$$\underline{\gamma = \beta - \alpha} . \quad (6)$$

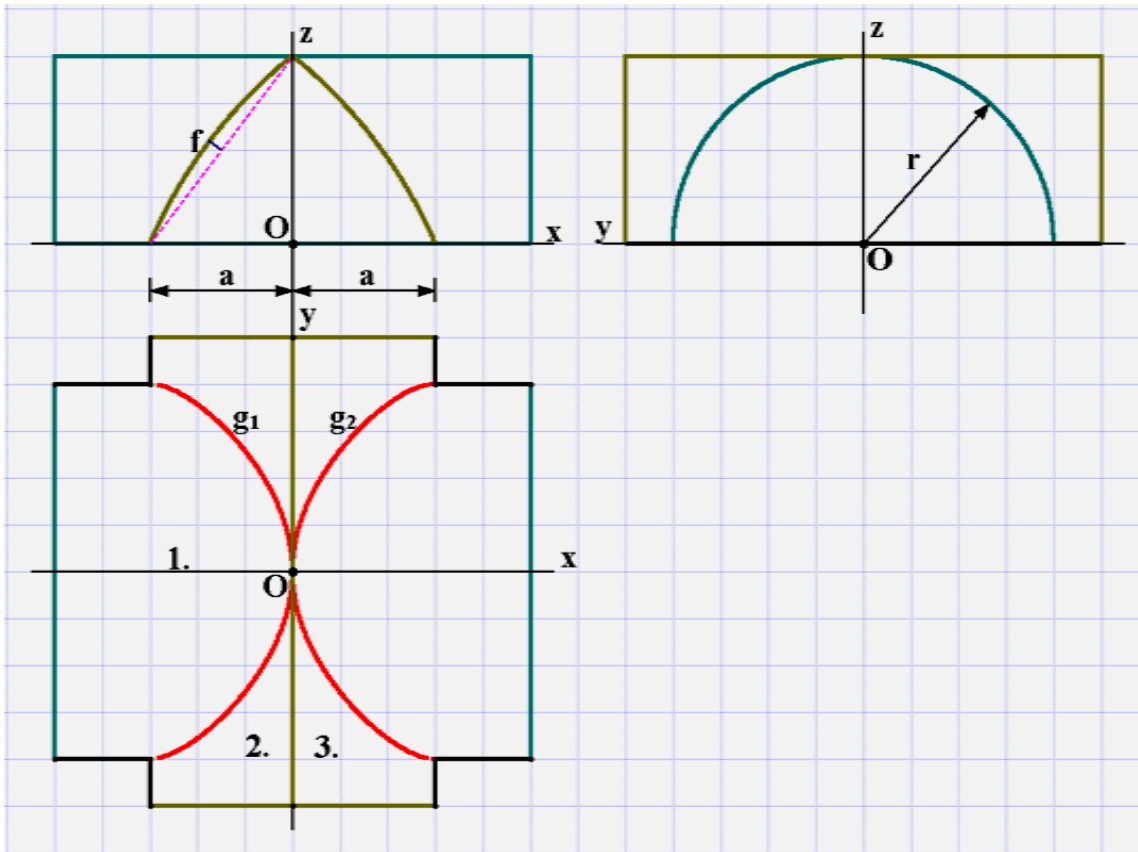
A 2. henger köríve középpontjának koordinátái ezekkel:

$$\underline{x_{C_2} = R \cdot \cos \gamma - a, \quad z_{C_2} = -R \cdot \sin \gamma} . \quad (7)$$

A 3. henger köríve C_3 középpontjának koordinátái a z tengelyre vett szimmetria miatt:

$$\underline{x_{C_3} = -x_{C_2}, \quad z_{C_3} = z_{C_2}} . \quad (8)$$

Ezután felírjuk a hengerek egyenleteit. Ehhez ld. a 3. ábrát is, a k. r. tengelyeivel!



3. ábra

Az 1. henger implicit egyenlete:

$$\underline{r^2 = y^2 + z_1^2}; \quad (9)$$

a 2. henger implicit egyenlete:

$$\underline{R^2 = (x - x_{c_2})^2 + (z_2 - z_{c_2})^2}, \quad -a \leq x \leq a; \quad (10)$$

a 3. henger implicit egyenlete:

$$R^2 = (x - x_{c_3})^2 + (z_3 - z_{c_3})^2, \quad -a \leq x \leq a; \quad (11)$$

most (8) és (11) szerint a 3. henger újabb implicit egyenlete:

$$\underline{R^2 = (x + x_{c_2})^2 + (z_3 - z_{c_2})^2}, \quad -a \leq x \leq a. \quad (12)$$

Folytatva: a (9) egyenletből, mivel a felső fél hengerfelületről van szó:

$$z_1^2 = r^2 - y^2 \rightarrow \underline{z_1 = +\sqrt{r^2 - y^2}}. \quad (13)$$

Az 1. és a 2. henger összemetsződések:

$$z_1 = z_2, \quad (14)$$

így (10), (13) és (14) szerint a $\mathbf{g}_1$ görbe implicit egyenlete:

$$\underline{\underline{R^2 = (x - x_{c_2})^2 + (\sqrt{r^2 - y^2} - z_{c_2})^2}}, \quad -a \leq x \leq a. \quad (15)$$

Hasonlóképpen az 1. és a 3. henger összemetsződésekor:

$$z_1 = z_3, \quad (16)$$

így (12), (13) és (16) - tal a $\mathbf{g}_2$ görbe implicit egyenlete:

$$\underline{\underline{R^2 = (x + x_{c_2})^2 + (\sqrt{r^2 - y^2} - z_{c_2})^2}}, \quad -a \leq x \leq a. \quad (17)$$

Most már minden keresett mennyiség kifejezése rendelkezésünkre áll az ábrázoláshoz, így ténylegesen számolni tudunk, ha megadtuk az $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{f}$ adatokat. Így készült az 1. ábra is.

Adatok az ábrázoláshoz:

$$a = 60 \text{ cm}, \quad r = 80 \text{ cm}, \quad f = 6 \text{ cm}. \quad (A)$$

A fenti képletekkel és (A) - val az eredmények az alábbiak.

$$c = \sqrt{a^2 + r^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} \text{ cm} = 100 \text{ cm}; \quad (a)$$

$$R = \frac{c^2}{8 \cdot f} + \frac{f}{2} = \left(\frac{100^2}{8 \cdot 6} + \frac{6}{2} \right) \text{ cm} = 211,333 \text{ cm}; \quad (b)$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{c}{2 \cdot R}\right) = \arcsin\left(\frac{100}{2 \cdot 211,333}\right) = 13,686^\circ; \quad (c)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{60}{100}\right) = 36,870^\circ; \quad (d)$$

$$\gamma = \beta - \alpha = 36,870^\circ - 13,686^\circ = 23,184^\circ; \quad (e)$$

$$x_{c_2} = R \cdot \cos \gamma - a = 211,333 \text{ cm} \cdot \cos 23,184^\circ - 60 \text{ cm} = 134,267 \text{ cm}; \quad (f)$$

$$z_{c_2} = -R \cdot \sin \gamma = -211,333 \text{ cm} \cdot \sin 23,184^\circ = -83,197 \text{ cm}; \quad (g)$$

az 1. henger explicit egyenlete:

$$z_1 = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{80^2 - y^2} \text{ cm}; \quad (h)$$

a 2. henger implicit egyenlete:

$$R^2 = (x - x_{c_2})^2 + (z_2 - z_{c_2})^2, \quad -a \leq x \leq a;$$

$$211,333^2 = (x - 134,267)^2 + (z_2 + 83,197)^2, \quad -60 \text{ cm} \leq x \leq 60 \text{ cm}; \quad (i)$$

a 3. henger implicit egyenlete:

$$R^2 = (x + x_{c_2})^2 + (z_3 - z_{c_2})^2, \quad -a \leq x \leq a;$$

$$211,333^2 = (x + 134,267)^2 + (z_3 + 83,197)^2, \quad -60 \text{ cm} \leq x \leq 60 \text{ cm}; \quad (\text{j})$$

az 1. és a 2. henger g_1 metszetgörbájének implicit egyenlete:

$$R^2 = (x - x_{c_2})^2 + (\sqrt{r^2 - y^2} - z_{c_2})^2, \quad -a \leq x \leq a,$$

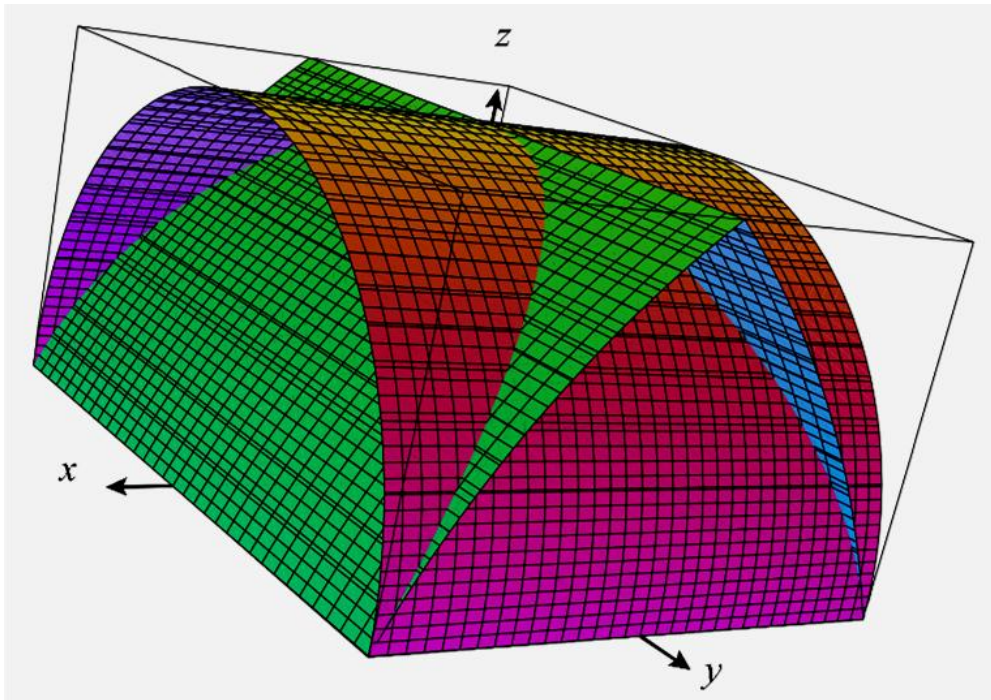
$$211,333^2 = (x - 134,267)^2 + (\sqrt{80^2 - y^2} + 83,197)^2, \quad -60 \text{ cm} \leq x \leq 60 \text{ cm}; \quad (\text{k})$$

az 1. és a 3. henger g_2 metszetgörbájének implicit egyenlete:

$$R^2 = (x + x_{c_2})^2 + (\sqrt{r^2 - y^2} - z_{c_2})^2, \quad -a \leq x \leq a;$$

$$211,333^2 = (x + 134,267)^2 + (\sqrt{80^2 - y^2} + 83,197)^2, \quad -a \leq x \leq a. \quad (\text{l})$$

Az eredményt a 4. ábra térhatású képén is megismerhetjük.



4. ábra

Ennek az a sajátossága, hogy a valóságban hiányzó belső részek itt még benne vannak.

Megjegyzések:

M1. A 2. és a 3. henger egy egyenesben metsződik, a csúcs élben. Ennek egyenlete:

$$z(y) = r, \quad (18)$$

ami az $x = 0$ és $z = r$ síkok metszészvonala.

M2. A 4. ábra a szerkesztéses megoldáshoz is jó szemléltetést ad: egy adott $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1$ metsző - sík az 1. hengert az x tengellyel párhuzamos, a 2. és 3. hengert az y tengellyel párhuzamos egyenesekben metszi; ezen egyenesek metszéspontjai adják az áthatási görbék pontjait. A szerkesztéses megoldás tehát $\mathbf{z} = \mathbf{z}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) vízszintes szeletelő síkok alkalmazásával történhet.

M3. Egy valóságos / fizikai tető esetében véges méretű (nem nulla vastagságú) anyagok - kal kell dolgozni, ami bonyolítja a helyzetet. Az erre vonatkozó ismeretekhez ld. pl.: [1]!

M4. A fenti áthatási görbék: térgörbék. Ugyanis itt ezek akkor lennének síkgörbék, ha az 1. hengert síkokkal metszenénk. (És még mikor lehetnének a metszéspontok síkgörbék?) A $\mathbf{g}_1$ áthatási görbe paraméteres egyenletrendszere fentiekkel:

$$x(t) = x_{c_2} \pm \sqrt{R^2 - (t - z_{c_2})^2}, \quad (19 / 1)$$

$$y(t) = \pm \sqrt{r^2 - t^2}, \quad (19 / 2)$$

$$z(t) = t, \quad (19 / 3)$$

$$0 \leq t \leq r. \quad (19 / 4)$$

A (19) képletek négy térgörbe darabot írnak le, ahogyan felülnézetben az 1. és a 3. ábra piros görbéiből is látható. Ezek a $(0, 0, r)$ pontban érintkeznek.

A $\mathbf{g}_2$ áthatási görbe paraméteres egyenletrendszerének felírását rábizzuk az érdeklődő Olvasóra.

M5. Az témához illik egy korábbi dolgozatunk is, melynek címe: **Csúcsívek rajzolása.**

Forrás:

[1] – **Peter Kübler:** Basiswissen Vergatterung

RM Rudolf Müller / Bruderverlag Albert Bruder GmbH & Co. KG, Köln 2019

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 09. 03.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>